

Memoirs of the Osaka Institute
of Technology, Series A
Vol.48, No.1(2003) pp.9~29

n 次元超立方体グラフ C_n の n 個の独立全域木の構成

川 ■ 喜三男

情報科学部 情報システム科

〈2003年5月26日受理〉

A construction of n independent spanning trees in a hypercube graph C_n

by

Kimio KAWAGUCHI

Department of Information Systems, Faculty of Information Science and Technology

(Manuscript received May 26, 2003)

Abstract

In this paper it is shown that there exist n independent spanning rooted trees T_1^n, \dots, T_n^n in a n -dimensional hypercube graph C_n , and the maximum height of the trees is given by the following expression :

$$\text{Max Height}(T_i^n) = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ n+1 & (2 \leq n \leq 4) \\ n+2 & (n \geq 5) \end{cases}$$

1. 序論

グラフ $G=(V, E)$ の定点 $r \in V$ を根とする n 個の全域木 T_1, \dots, T_n は, 任意の点 $v \in V$ に対して v から r に至る T_1, \dots, T_n 上の道 $P_1[v, r], \dots, P_n[v, r]$ が互いに内点独立であるとき独立であるという. グラフ G が n 個の独立な全域木 T_1, \dots, T_n を持つならば, G から高々 $n-1$ 個の $(V \cup E) - \{r\}$ の要素を取除いたグラフの任意の点 v から r へは少なくとも 1 本の道 $P_i[v, r]$ が残存するので, G を放送中心を持つ通信網のグラフモデルであると解釈するとき, G は故障耐性の高い, 換言すれば信頼性の高い通信網を構成するといえる. 亦, r を根として構成された各全域木 T_i の高さ $\text{Height}(T_i(r))$ が小であるほど通信に要する時間は短い.

従来, A.Itai and M.Rodeh [1] は, 2-連結グラフに於ける 2 個の独立全域木を見出す線形時間アルゴリズムを与え, J.Chierian and S.N.Maheshwari [2] は, 3-連結グラフに於ける 3 個の独立全域木を $O(|V| |E|)$ 時間で見出す方法を示した. A. Zehavi and A. Itai [3] は, 任意の 3-連結グラフ G に於いて任意の点 r を根とする 3 個の独立な全域木が存在することを示し, 更に任意の k -連結グラフは任意の点 r を根とする k 個の独立全域木を持つことを予想した. 五十嵐善英, 等 [4] は, 任意のグラフ G_x, G_y がそれぞれ n_x, n_y 個の独立な全域木を持つならば, 積グラフ $G_x \times G_y$ の $n_x + n_y$ 個の独立全域木が構成できることを示した.

文献 [4] に於ける一般的構成法を例えば n 次元超立方体グラフ C_n というように具体的グラフに適用するとき, 個々のグラフの特殊な性質を慮外に置き, 一般論のみに立脚して独立全域木の高さの最大を評価するならば, 最悪ケースを想定せざるを得なくなり, その結果文献 [4] では C_n に対しては独立全域木の構成順序を

$$C_n = (\dots((C_1 \times C_1) \times C_1) \times \dots) \times C_1$$

に基づいて行うとき, $\text{Max Height}(T_i) = 2n-1$ と評価し, 又

$$C_n = (\dots(((C_1 \times C_1) \times (C_1 \times C_1)) \times ((C_1 \times C_1) \times (C_1 \times C_1))) \times (C_1 \times C_1) \dots)$$

に基づいて行うとき, $\text{Max Height}(T_i) = \lceil 3n/2 \rceil$ と評価している.

上記の如く構成された独立全域木の評価基準を $\text{Max Height}(T_i)$ の最小化に置くならば, この基準に沿って構成法を定めるべきである. 本稿はこの観点に立って C_n の独立全域木を構成し,

$$\text{Max Height}(T_i) = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ n+1 & (2 \leq n \leq 4) \\ n+2 & (n \geq 5) \end{cases}$$

という結果を得, しかも $C_n = (\dots((C_1 \times C_1) \times C_1) \times \dots) \times C_1$ に基づく構成順序を用いてこの結果が得られることを示す.

2. 諸定義

グラフ $G = (V, E)$ は点の有限集合 V と辺の有限集合 E からなる. 特に, 異なる点の順序のない対の集合 $\{(x, y) | (x, y) = (y, x), x \neq y, x, y \in V\}$ の部分集合と E との間に 1 対 1 の対応関係 φ が存在するとき, G にはループも 2 重辺も存在し得ないので, G は単純な無向グラフである. φ によって辺 $e \in E$ に (v_1, v_2) が対応するならば, $e = (v_1, v_2)$ 又は $v_1 v_2$ と書く. このとき, v_1, v_2 は e の端点であるという. 以下本稿で扱うグラフはすべて単純な無向グラフである.

$G = (V, E)$ に対してグラフ $H = (V', E')$ が $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ を満たすならば, H は G の部分グラフであるという.

グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$ と $G_2 = (V_2, E_2)$ の直積 $G_1 \times G_2 = (V, E)$ は,

$$V = V_1 \times V_2 = \{(u, v) | u \in V_1, v \in V_2\}$$

$$E = \{(u_1, v)(u_2, v), (u, v_1)(u, v_2) | u_1 u_2 \in E_1, v \in V_2, u \in V_1, v_1 v_2 \in E_2\}$$

により定義される. $G_1 \times G_2$ を G_1 と G_2 の積グラフという.

n 次元超立方体グラフを以下のように定義する.

$$C_1 = (\{0, 1\}, \{01\}); C_n = C_{n-1} \times C_1$$

C_n の点は 2 進数 $(a_{n-1} \cdots a_1 a_0)$ で表すことができ, 2 点 $(a_{n-1} \cdots a_1 a_0), (b_{n-1} \cdots b_1 b_0)$ が隣接する, 即ち辺 $(a_{n-1} \cdots a_1 a_0)(b_{n-1} \cdots b_1 b_0)$ が存在するための必要十分条件は, 或る i があって $a_i \neq b_i$ かつ $a_j = b_j (j \neq i)$ を満たすことである.

2 部グラフは $G = (X \cup Y, E)$ (但し $X \cap Y = \emptyset, X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset; X + Y$ と書く), $v_1 v_2 \in E$ ならば $v_1 \in X, v_2 \in Y$ 又は $v_1 \in Y, v_2 \in X$ であるようなグラフである.

グラフ G に於いて点 v を端点とする辺が k 個あるとき v の次数は k であるといい, $d(v) = k$ と書く. G のすべての点の次数が k であるとき G は k -正則であるという. n 次元超立方体グラフ C_n は n -正則である.

無向グラフ G に於ける点の系列 $P[v_0, v_m] = v_0 v_1 \cdots v_m$ が, $v_{i-1} v_i \in E (i = 1, 2, \dots, m)$ 且つ $v_{i-1} v_i \neq v_{j-1} v_j (i \neq j)$ を満たすとき, $P[v_0, v_m]$ は G の道であるという. 道には向きはなく, $P[v_0, v_m] = P[v_m, v_0] = v_m v_{m-1} \cdots v_0$ である. m をその長さといい, $\text{Length}(P[v_0, v_m])$ で表す. 道 $v_0 v_1 \cdots v_m$ に於いて特に $v_0 = v_m$ であるとき, この道を閉路という. 道 $P[p, q]$ が特に部分グラフ H 上にありこれを明示するとき, $P_H[p, q]$ と書く.

G の 2 点 u, v を結ぶ長さが最小の道の長さを u, v 間の距離といい, $d_G(u, v)$ 又は $d(u, v)$ で表す.

G の 2 点 u, v を結ぶ 2 本の道 $u_0 (= u) u_1 \cdots u_l (= v)$ と $v_0 (= u) v_1 \cdots v_m (= v)$ が $u_i \neq v_j (1 \leq i < l, 1 \leq j < m)$ を満たすとき, この 2 本の道は互いに内点独立又は単に独立であるという. 更

に u, v を結ぶ n 本の道の任意の 2 本が互いに内点独立であるとき, これら n 本の道は内点独立又は単に独立であるという.

G の任意の 2 点 u, v に対し, G の道 $P[u, v]$ が存在するとき, G は連結であるといい, 又独立な n 本の G の道 $P_1[u, v], \dots, P_n[u, v]$ が存在するとき, G は n 連結であるという.

グラフ T が連結であり, しかも閉路を持たないならば, T は木であるという. 木に於いては任意の 2 点を結ぶ道は唯一存在する. 特に木の 1 点 r を指定するとき r を根と呼び, T を根付き木という. 木 T の点 v と根 r を結ぶ道 $P[v, r]$ の長さ $\text{Length}(P[v, r])$ の最大を木 T の高さという. $\text{Height}(T(r))$ 又は $\text{Height}(T)$ と書く. 即ち

$$\text{Height}(T) = \max_{v \in V} \text{Length}(P[v, r])$$

G の部分グラフ $H = (V', E')$ が, 特に $V' = V$ であるとき H を G の全域部分グラフという. 全域部分グラフ H が木であるとき H は全域木であるという. $U \subseteq V \cup E$ に対して $G[U] = (W, W \times W \cap E)$ ($W = U \cap V$) を U によって誘導された部分グラフという. 亦 $F \subseteq V \cup E$ に対する誘導部分グラフ $G[V \cup E - F]$ を G/F と書く.

T_1, \dots, T_n はグラフ $G = (V, E)$ の $r \in V$ を根とする n 個の全域木であるとする. G の任意の点 v と r を結ぶ T_1, \dots, T_n の道 $P_1[v, r], \dots, P_n[v, r]$ が互いに内点独立であるとき, n 個の全域木 T_1, \dots, T_n は独立であるという.

3. 超立方体グラフの描画法

超立方体グラフ C_n を描くにはそれを 2 部グラフとして描くのが便利である. そこで先ずこれに関連する若干の考察を為すことにする. 次の補題はよく知られている.

〔補題 1〕 2 個以上の点をもつグラフが 2 部グラフであるための必要十分条件はすべての閉路が偶数個の辺から成ることである. ■

n 次元超立方体グラフ C_n が $n-1$ 次元超立方体グラフ C_{n-1} と 1 次元立方体グラフ C_1 の直積として定義されることから, C_n の閉路はすべて偶数個の辺から成り, 従って補題 1 により C_n は 2 部グラフである. 次に 2 部グラフとしての C_n の標準的描画法を定める.

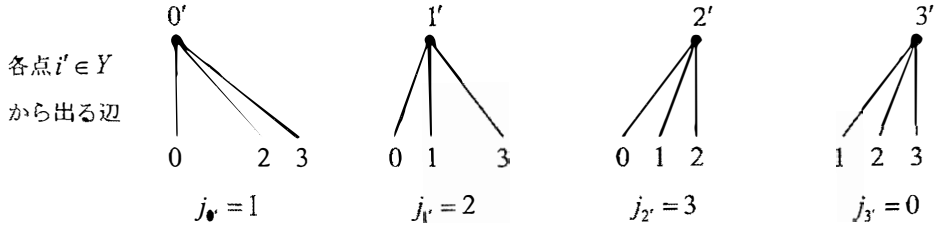
4 点 2 正則 2 部グラフ

2 次元立方体グラフ C_2 を 2 部グラフとして描けば下図右のようになる.

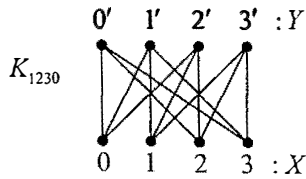


8 点 3 正則 2 部グラフ

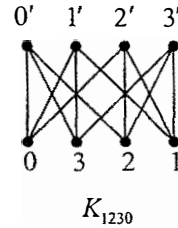
2 部グラフ $G(V = X \cup Y, E)$ をここでは単に (X, Y) と書く. 3 正則 2 部グラフ (X, Y) (但し $|X| = 4, |Y| = 4; X = \{0, 1, 2, 3\}, Y = \{0', 1', 2', 3'\}$) の辺集合 E が, 各点 $i' \in Y$ は $X - j_{i'}$ の各点との間にのみ辺を有するとして定義されるとき, この 8 点 3 正則 2 部グラフを $K_{j_0' j_1' j_2' j_3'}$ と書き表す. 例えば, 各点 $i' \in Y$ から出る辺を次の図が示すように定義すれば, K_{1230} が定義され



て, 下に示すように描くことができる.

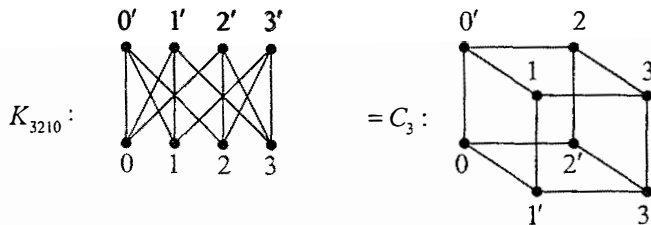


一般に $K_{j_0' j_1' j_2' j_3'}$ に対して X の点を描く順序を左から j_3', j_2', j_1', j_0' の順に描くならば, 例えば K_{1230} に対しては 0, 3, 2, 1 の順に左から描けば, 右の図のように描かれる. このように描き直すことにより全ての $K_{j_0' j_1' j_2' j_3'}$ が互いに同型であることが直観的に明らかになる.



〔補題 2〕 3 正則 8 点 2 部グラフ (X, Y) ($|X| = 4, |Y| = 4$) はすべて 3 次元立方体グラフ C_3 に同型である. ■

下左に示す 3 正則 8 点 2 部グラフ K_{3210} と下右に示す 3 次元立方体グラフ C_3 は同一のグラフである.

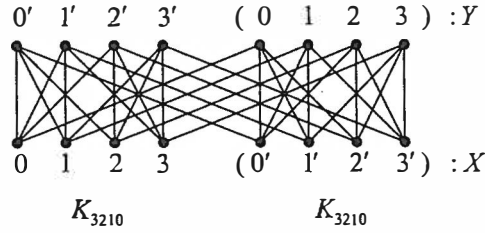


上述から C_3 の描画の標準として K_{3210} を用いる.

高次元の立方体の描画については以下のように帰納的に定義できる.

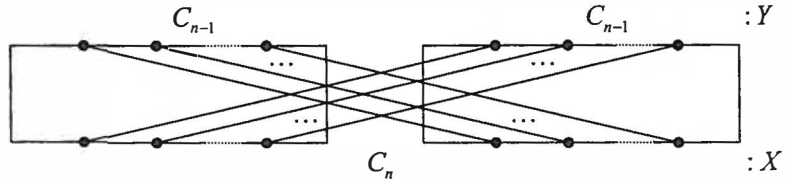
1) C_4 の描画.

2 個の K_{3210} の中 1 個を上下反転させて描けば C_4 が 2 部グラフとして描ける.



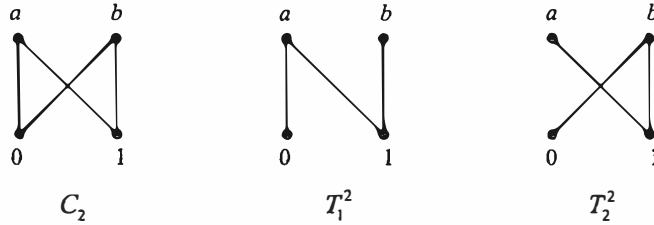
2) C_n の描画.

同様に 2 個の 2 部グラフ C_{n-1} の中 1 個を上下反転させて下図に示すように描けばよい.



4. C_n の点独立な全域木の帰納的定義

2 次元立方体グラフ C_2 の点独立な全域木 T_1^2, T_2^2 が次の図のように定義できる.



C_2 の任意の点 u から上図の点 $0 \sim T_1^2, T_2^2$ のそれぞれにより定義される道 $P_1^2[u, 0], P_2^2[u, 0]$ を表によって示すと

$P_1^2[u, 0]$	$a0$	$bla0$	$la0$
$P_2^2[u, 0]$	$a1b0$	$b0$	$lb0$

となる. 表から明らかなように C_2 の任意の点 u から点 0 への道 $P_1^2[u, 0], P_2^2[u, 0]$ は点独立である. 亦, 表から明らかなように $\text{Height}(T_1^2) = 3, \text{Height}(T_2^2) = 3$ が成り立つ.

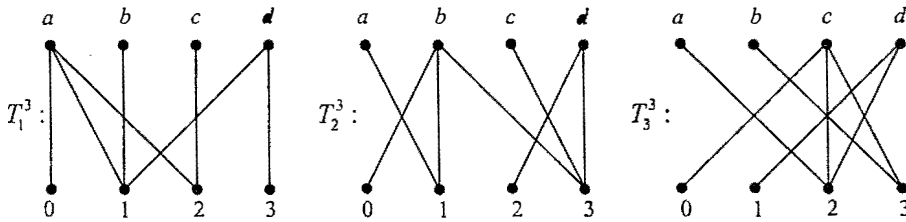
本章では, n 次元超立方体グラフ C_n の点独立な全域木の n 組 (T_1^n, \dots, T_n^n) が帰納的に定義できることを示す. 唯, 方法への洞察を容易ならしめるため, 帰納的定義の第 I 段として C_3 の点独立な全域木の 3 組 (T_1^3, T_2^3, T_3^3) を構成し, これを初期値に設定する. 次に定義の第 II 段に於いて C_{k-1} の点独立な全域木の $(k-1)$ 組 $(T_1^{k-1}, \dots, T_{k-1}^{k-1})$ が定義されたと仮定して C_k の点独立な全域木の k 組 (T_1^k, \dots, T_k^k) が定義できることを示す. その結果次の定理が得られる.

[定理 1] n 次元超立方体グラフ C_n の点独立な全域木の n 組 (T_1^n, \dots, T_n^n) を帰納的に構成することができ、しかも、定点 0 を根とすると、構成された全域木 T_i^n の高さに就いて

$$\left. \begin{aligned} \text{Height}(T_i^2) &= 3 \quad (i=1,2) \\ \text{Height}(T_i^3) &= 4 \quad (i=1,2,3) \\ \text{Height}(T_i^n) &= \text{Height}(T_i^{n-1}) + 1 \quad (i=1, \dots, n-1) \\ \text{Height}(T_n^n) &= \text{Height}(T_1^{n-1}) + 2 \end{aligned} \right\} \quad (n \geq 4)$$

が成り立つ。

(証明) [I] 先ず、 C_3 の点独立な全域木の 3 組 (T_1^3, T_2^3, T_3^3) を下図のように構成する。



C_3 の各点名を上図のように定めると、 C_3 の任意の点 u から点 0 への全域木 T_i^3 ($i=1,2,3$) の上の道 $P_i^3[u, 0]$ ($i=1,2,3$) が点独立であることは次の表により容易に確かめられる。

$P_1^3[u, 0]$	$a0$	$bl a0$	$c2 a0$	$d1 a0$	$1a0$	$2a0$	$3d1 a0$
$P_2^3[u, 0]$	$a1 b0$	$b0$	$c3 b0$	$d3 b0$	$1b0$	$2d3 b0$	$3b0$
$P_3^3[u, 0]$	$a2 c0$	$b3 c0$	$c0$	$d2 c0$	$1d2 c0$	$2c0$	$3c0$

亦、表からも明らかに $\text{Height}(T_1^3) = \text{Height}(T_2^3) = \text{Height}(T_3^3) = 4$ である。

[II] 任意の自然数 k に対して C_{k-1} の点独立な全域木の $(k-1)$ 組 $(T_1^{k-1}, \dots, T_{k-1}^{k-1})$ が定義されたと仮定して C_k の点独立な全域木の k 組 (T_1^k, \dots, T_k^k) が定義できることを示す。

C_{k-1} に対する $(T_1^{k-1}, \dots, T_{k-1}^{k-1})$ から C_k に対する (T_1^k, \dots, T_k^k) を構成する方法の理解を容易ならしめるため、具体例として上述の (T_1^3, T_2^3, T_3^3) から C_4 に対する (T_1^4, \dots, T_4^4) を如何に構成するかを示す。

[(T_1^4, \dots, T_4^4) の構成法]

一般に C_k は 2 部グラフであり、 C_k の点集合の 2 部分割は $V(C_k) = (X(C_k), Y(C_k))$ と書ける。 $X(C_k) = X, Y(C_k) = Y$ と略記すれば、 $V(C_3)$ に対しては、前図に従って

$$X = \{0, 1, 2, 3\} \quad Y = \{a, b, c, d\}$$

とし、 $V(C_4)$ に対しては

$$X = \{0, 1, 2, 3, 0', 1', 2', 3'\} \quad Y = \{a, b, c, d, a', b', c', d'\}$$

とする。亦 T_i^4 ($i=1, \dots, 4$) の部分グラフ T_i^{4-}, T_i^{4+} を誘導部分グラフ

$$T_i^{4-} = T_i^4[\{0, 1, 2, 3, a, b, c, d\}] \quad T_i^{4+} = T_i^4[\{0', 1', 2', 3', a', b', c', d'\}]$$

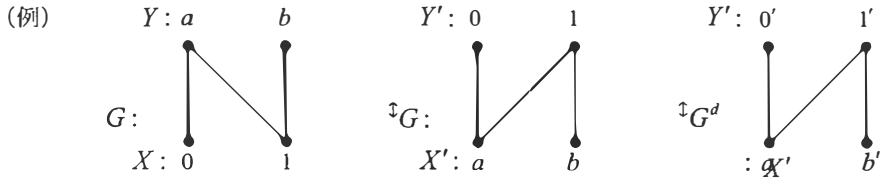
となるように構成し,更に T_i^{4-}, T_i^{4+} を結合して T_i^4 を完成する.

2部グラフ $G = G(X+Y, E)$ (但し $X = \{0, 1, 2, \dots\}, Y = \{a, b, c, \dots\}$ とする) に対してその反転 ${}^{\mathfrak{I}}G = {}^{\mathfrak{I}}G(X'+Y', E')$ を次のように定義する.

$$X' = Y = \{a, b, c, \dots\}, \quad Y' = X = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad E' = E$$

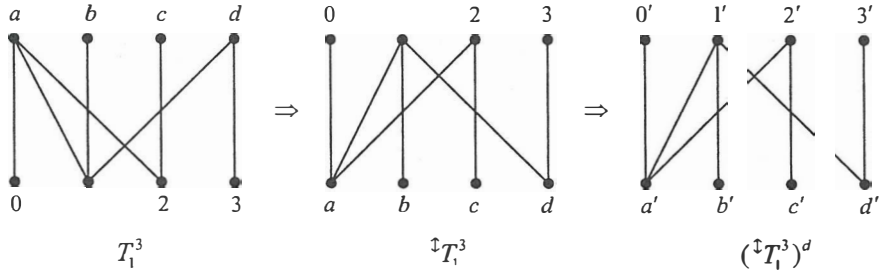
グラフ $G = (X+Y, E)$ の全ての点名 m にダッシュを付して m' と改名する操作を行ったとき, $G^d = (X^d + Y^d, E^d)$ と書いてこれを表す.但し E^d は点の改名に伴う自然な変更にかかる.

上記の反転と改名の操作については,それによってグラフ G のトポロジーは実質的に全く変わらず,名目上の変更が行われるのみである.



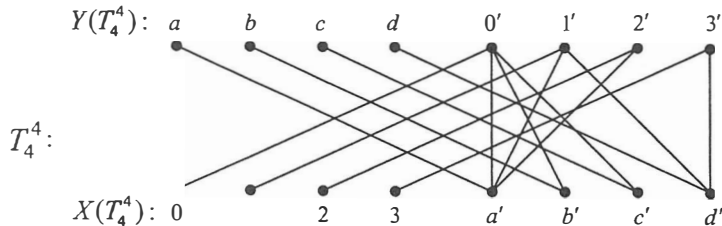
[T_4^4 の構成] 先ず, $T_4^{4-} = (X+Y, \phi)$ ($X = \{0, 1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c, d\}$)とする.

T_1^3 の反転とその点の改名操作により先ず $({}^{\mathfrak{I}}T_1^3)^d = ((X({}^{\mathfrak{I}}T_1^3))^d + (Y({}^{\mathfrak{I}}T_1^3))^d, E^d)$ を求めると次の図のようになる.そこでは, $(X({}^{\mathfrak{I}}T_1^3))^d = \{a', b', c', d'\}, (Y({}^{\mathfrak{I}}T_1^3))^d = \{0', 1', 2', 3'\}$.



更に T_1^4 と共に辺を2重に使用することを避けるため 2^0 と 2^1 (一般に T_k^{k+} の構成に於いては $2^0, 2^1, \dots, 2^{k-3}$)に対応する $({}^{\mathfrak{I}}T_1^3)^d$ の点 b', c' と点 $1', 2'$ を繋ぐ辺 $b'1', c'2'$ を削除し,その代りに辺 $b'0', c'0'$ を追加する.こうして得られたグラフを T_4^{4+} とする(次図右半部参照).

次に, $X(T_4^{4-})$ の各点 l ($l = 0, \dots, 3$)と $Y(T_4^{4+})$ の各点 l' ($l = 0, \dots, 3$)を繋ぐ辺 $00', \dots, 33'$ 及び $Y(T_4^{4-})$ の各点 α ($\alpha = a, \dots, d$)と $X(T_4^{4+})$ の各点 α' ($\alpha = a, \dots, d$)を繋ぐ辺 aa', \dots, dd' を追加する.以上の操作により得られるグラフが T_4^4 である.これは下図のようになる.



$$T_4^{4-}, E(T_4^{4-}) = \phi \quad T_4^{4+} = (T_1^3)^d - \{b'1', c'2'\} + \{b'0', c'0'\}$$

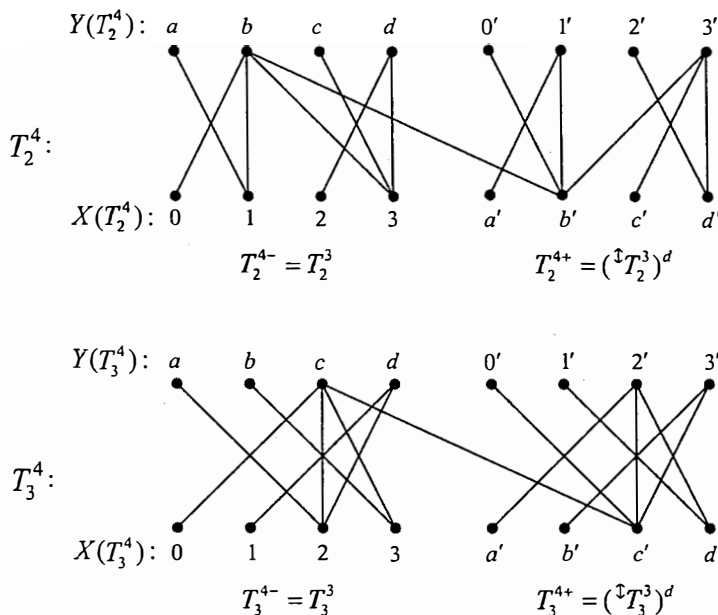
高さに就いては $\text{Height}(T_4^4) = \text{Length}(33'd'1'a'0'0) = \text{Height}(T_1^3) + 2 = 6$ が成り立つ.

[T_2^4, T_3^4 の構成] 先ず, T_2^3, T_3^3 を以て T_2^{4-}, T_3^{4-} とする.

次に, T_2^3, T_3^3 から $(T_2^3)^d, (T_3^3)^d$ を構成し, それぞれ T_2^{4+}, T_3^{4+} とする.

T_2^4 の構成は T_2^{4-} の点 b と T_2^{4+} の点 b' を繋ぐ辺 bb' を追加することにより完了する. 又 T_3^4 の構成も T_3^{4-} の点 c と T_3^{4+} の点 c' を繋ぐ辺 cc' を追加することにより完了する.

これを図示すると次のようになる.



亦, 上図より明らかに

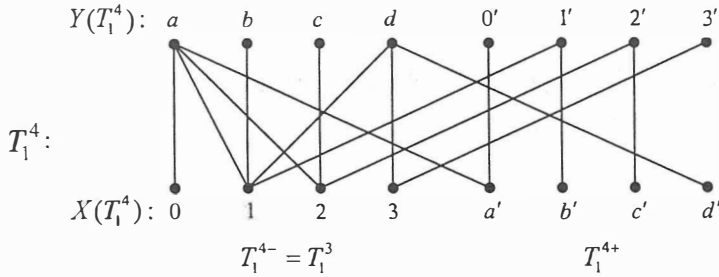
$$\text{Height}(T_i^4) = (\text{Height}(T_i^{4+}) - 1) + 2 = (\text{Height}(T_i^3) - 1) + 2 = 5 \quad (i = 2, 3)$$

が成り立つ. 木 T_i^{4+} の根は点 $0'$ の隣接点となるからである.

[T_1^4 の構成] 先ず $T_1^{4-} = T_1^3$ とする.

T_1^{4+} は, $X(T_1^{4+}) = \{a', b', c', d'\}$ と $Y(T_1^{4+}) = \{0', 1', 2', 3'\}$ の和集合を点集合とし, 辺集合を $E(T_1^{4+}) = \{a'0', b'1', c'2'\}$ とするグラフである. ここで注意すべきことは, 3 個の辺の端点 $0', 1', 2'$ が $0'$ 及び関係式 $2^i < 2^2$ を満たす非負整数 $i = 0, 1$ に対応する $(2^0)'$ と $(2^1)'$ であることである. 更に言えば, T_1^{4+} の構成に於いては $0'$ 以外に関係式 $2^i < 2^{k-2}$ を満たす非負整数 $i = 0, \dots, k-3$ に対応する $(2^i)'$ ($i = 0, \dots, k-3$) が $E(T_1^{4+})$ の辺の端点となることである.

T_1^4 は, $X(T_1^{4-}) - \{b', c'\}$ (b', c' は上述の $(2^i)'$ ($i = 0, 1$) を端点とする辺のもう一方の端点) の点 a', d' と $Y(T_1^{4-})$ の点 a, d を繋ぐ辺 aa', dd' , 及び $0'$ を除く $Y(T_1^{4+})$ の全ての点 $1', 2', 3'$ と $X(T_1^{4-})$ の対応する点 $1, 2, 3$ を繋ぐ辺 $11', 22', 33'$ を追加して完成する.



木の高さに就いては $\text{Height}(T_1^4) = \text{Length}(3'3d1a0) = \text{Height}(T_1^3) + 1 = 5$ が成り立つ.

[考察] 上述の構成によれば以下が成り立つ.

(1) i) $T_1^{4-} = T_1^3, T_2^{4-} = T_2^3, T_3^{4-} = T_3^3$

ii) $E(T_4^{4-}) = \phi$

従って, $(T_1^{4-}, T_2^{4-}, T_3^{4-})$ は $C_4^-(=C_3)$ の点独立な全域木の 3 組であり, 又 u が C_4^- の点であるならば T_4^4 に於ける u から 0 への道 $P_4^4[u, 0]$ の内点は, $E(T_4^{4-}) = \phi$ であるので, すべて C_4^+ の点である. 故に道 $P_1^4[u, 0], P_2^4[u, 0], P_3^4[u, 0], P_4^4[u, 0]$ は, u が C_4^- の点である限り点独立である.

(2) i) $E(T_1^{4+}) = \{a'0', b'1', c'2'\}$

ii) $T_2^{4+} = (\overset{\circ}{T}_2^3)^d, T_3^{4+} = (\overset{\circ}{T}_3^3)^d$

iii) $T_4^{4+} = (\overset{\circ}{T}_1^3)^d - \{b'1', c'2'\} + \{b'0', c'0'\}$

$u \in V(C_4^+)$ から点 0 への各全域木 T_i^4 に沿う道に就いては場合を分けて考察する.

a) $u = 0'$ の場合: 各全域木 T_i^4 に沿う道は

$$P_1^4[0', 0] = 0'a'a0, P_2^4[0', 0] = 0'b'b0, P_3^4[0', 0] = 0'c'c0, P_4^4[0', 0] = 0'0$$

であるから, これらは点独立である.

b) $u \neq 0'$ の場合: $(\overset{\circ}{T}_1^3)^d, (\overset{\circ}{T}_2^3)^d, (\overset{\circ}{T}_3^3)^d$ は, T_1^3, T_2^3, T_3^3 とトポロジーを等しくするから, 点独立である. T_1^3 に於いて点 b, c は葉であるから, $P_1^3[v, 0] (v \neq 0)$ が点 $w \in \{b, c\}$ (辺 $b1, c2$) を含むのは, $v = w$ のときに限られる. 従って道を $P_1^3[b, 0] = b1a0$ から $b0$ へ, $P_1^3[c, 0] = c2a0$ から $c0$ へ変更したとしても点独立性に影響しない. $(\overset{\circ}{T}_1^3)^d$ と T_4^{4+} の相違はこの変更に照応するから, 任意の点 $u \in V(C_4^+)$ から $0'$ への $T_2^{4+} = (\overset{\circ}{T}_2^3)^d, T_3^{4+} = (\overset{\circ}{T}_3^3)^d$ 及び T_4^{4+} のそれぞれの道 $P_2^{4+}[u, 0'], P_3^{4+}[u, 0']$ 及び $P_4^{4+}[u, 0']$ の点独立性は保障される. 更に道 $P_2^{4+}[u, 0']$ の終点 $0'$ の直前の点は b' , 道 $P_3^{4+}[u, 0']$ の終点 $0'$ の直前の点は c' であるから,

$$T_2^4 \text{ の道: } P_2^4[u, 0] = [P_2^{4+}[u, 0'] - 0'] \cdot [b0] = u \cdots b'b0$$

$$T_3^4 \text{ の道: } P_3^4[u, 0] = [P_3^{4+}[u, 0'] - 0'] \cdot [c0] = u \cdots c'c0$$

$$T_4^4 \text{ の道: } P_4^4[u, 0] = P_4^{4+}[u, 0'] \cdot [0] = u \cdots 0'0$$

の三者も点独立である. 点 $u \in V(C_4^+)$ に対する T_2^4 の道の C_4^- 部分は $[b0]$, T_3^4 の道の C_4^- 部分は $[c0]$, T_4^4 の道の C_4^- 部分は $[0]$ であり, T_1^4 の道の C_4^+ 部分に就いては, 点 $1', 2'$ を中途通過す

るのは道の始点が b', c' のときだけであり, それは T_1^3 に於ける道 $P_1^3[b, 0], P_1^3[c, 0]$ の一部 $b1, c2$ に相当する $b'1', c'2'$ である. 更に, 一般に T_1^4 の道の C_4^- 部分は $V(C_4^-) - \{0, b, c\}$ の点のみを通過する. 故に, T_1^4 は他の三者と道の内点を共有することはない.

以上により, 上述で構成された 4 組 $(T_1^4, T_2^4, T_3^4, T_4^4)$ は点独立であることが示された.

木の高さに就いては, $\text{Height}(T_i^3) = 4$ ($i = 1, 2, 3$) に対して C_4 では

$$\text{Height}(T_i^4) = \text{Height}(T_i^3) + 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \text{Height}(T_4^4) = \text{Height}(T_1^3) + 2$$

が成立するが, この関係式は実は C_k ($k \geq 4$) に対して

$$\text{Height}(T_i^k) = \text{Height}(T_i^{k-1}) + 1 \quad (i = 1, \dots, k-1), \quad \text{Height}(T_k^k) = \text{Height}(T_1^{k-1}) + 2$$

と一般化され, 結局 $\text{Max}_{1 \leq i \leq k} \text{Height}(T_i^k) = k + 2$ を得る.

[C_k の点独立な全域木の k 組 (T_1^k, \dots, T_k^k) の構成] (Figure 1, 2; Table 1, 2 参照)

[T_2^k, \dots, T_{k-1}^k の構成]

$T_2^{k-1}, \dots, T_{k-1}^{k-1}$ を以って $T_2^{k-}, \dots, T_{k-1}^{k-}$ とする.

次に, $T_2^{k-1}, \dots, T_{k-1}^{k-1}$ から $(T_2^{k-1})^d, \dots, (T_{k-1}^{k-1})^d$ をそれぞれ構成し, $T_2^{k+}, \dots, T_{k-1}^{k+}$ とする.

T_i^k ($i = 2, \dots, k-1$) の構成は $Y(T_i^{k-})$ の $(2^{i-2} + 1)$ 番目の点 p_i (前述の $[T_2^4, T_3^4]$ の構成) では p_i ($(2^{2-2} + 1) = 2$ 番目の点は b , $(2^{3-2} + 1) = 3$ 番目の点は c) と $X((T_i^{k+})^d)$ の $(2^{i-2} + 1)$ 番目の点 p'_i を繋ぐ辺 $p_i p'_i$ を追加することにより完成する. この構成法では, 木 T_i^{k+} の任意の点 u から 0 への道は, T_i^{k+} の根を上記の p'_i とし, これに道 $p'_i p_i 0$ を付加したとき u から 0 に至る道である. その最大の長さが T_i^k の高さとなるので次式が得られる.

$$\text{Height}(T_i^k) = \text{Height}(T_i^{k+}) + 2 = (\text{Height}(T_i^{k-1}) - 1) + 2 = \text{Height}(T_i^{k-1}) + 1 \quad (i = 2, \dots, k-1)$$

[T_2^k, \dots, T_{k-1}^k 相互の独立性]

T_i^{k-} ($i = 2, \dots, k-1$) の任意の点 x から点 0 への木 T_i^k 上の道が通過するすべての点は T_i^{k-} の点であるので, これらの道 $P_i^k[x, 0]$ ($i = 2, \dots, k-1$) が内点を共有することがないのは帰納法の仮定により保障される. 又, T_i^{k+} と T_i^{k-} が同一構造を持つことから, T_i^{k+} の任意の点 y から点 0' への T_i^k 上の道が通過する点はすべて T_i^{k+} の点であるので, $P_i^k[y, 0']$ ($i = 2, \dots, k-1$) は同様に内点を共有することはない. 但し, y から点 0 へ至る道は $P_i^k[y, 0']$ の終点 0' の直前の点 p' ($X((T_i^{k+})^d)$ の $(2^{i-2} + 1)$ 番目の点) から $Y(T_i^{k-})$ の $(2^{i-2} + 1)$ 番目の点 p へ行き, 次いで 0 に到着する. 従って $P_i^k[y, 0]$ ($i = 2, \dots, k-1$) も内点を共有することはない.

[T_1^k の構成]

先ず $T_1^{k-} = T_1^{k-1}$ と定義する. 今, 便宜上 T_1^{k-} の点集合 $X(T_1^{k-}) + Y(T_1^{k-})$ を

$$X(T_1^{k-}) = \{0_-, 1_-, \dots, (2^{k-2} - 1)_-\} \quad Y(T_1^{k-}) = \{0'_-, 1'_-, \dots, (2^{k-2} - 1)_-\}$$

又, T_1^{k+} の点集合 $X(T_1^{k+}) + Y(T_1^{k+})$ を

$$X(T_1^{k+}) = \{0_+, 1_+, \dots, (2^{k-2} - 1)_+\} \quad Y(T_1^{k+}) = \{0'_+, 1'_+, \dots, (2^{k-2} - 1)'_+\}$$

とし, 描画に於いては, $X(T_1^{k-}) \cup X(T_1^{k+})$ は左から $0_-, \dots, (2^{k-2} - 1)_-, 0_+, \dots, (2^{k-2} - 1)_+$ の順に描き, $Y(T_1^{k-}) \cup Y(T_1^{k+})$ も左から $0'_-, \dots, (2^{k-2} - 1)'_-, 0'_+, \dots, (2^{k-2} - 1)'_+$ の順に描くものとする. 又この順序を用いて (左から) 何番目 (例えば $0'_+$ は $Y(T_1^{k+})$ の1番目) の点という言い方をする.

次に T_1^{k+} 内部及び T_1^{k-}, T_1^{k+} 間の辺を定義する.

T_1^{k+} 内部では, 点 $i = 0_+, 2_+, 2'_+, \dots, 2_+^{k-3}$ $\in X(T_1^{k+})$ と $Y(T_1^{k+})$ の点 i' の間に辺 ii' を定義する.

T_1^{k-}, T_1^{k+} 間の辺は, $1) j_+ \in X(T_1^{k+}) - \{2_+^0, 2_+^1, \dots, 2_+^{k-3}\}$ と $Y(T_1^{k-}) - \{(2_-^0)', (2_-^1)', \dots, (2_-^{k-3})'\}$

内の同番目の点 j'_- の間に辺 $j_+ j'_-$ を定義する. 2) $j'_+ \in Y(T_1^{k+}) - \{0'_+\}$ と $X(T_1^{k-}) - \{0_-\}$ 内の同番目の点 j_- の間に辺 $j'_+ j_-$ を定義する.

T_1^k の部分木 T_1^{k-} の高さは T_1^{k-1} の高さに等しく, それは T_1^{k-} の道 $P_1^{k-}[z, 0]$ (但し, k が偶数のとき $z = (2^{k-2} - 1)_-, k$ が奇数のとき $z = (2^{k-2} - 1)'_-$) の長さである. この z に接続される T_1^{k+} の道は長さ 0 であり, k が偶数のとき点 $(2^{k-2} - 1)'_+, k$ が奇数のとき点 $(2^{k-2} - 1)_+$ に外ならない. 従って次式が成り立つ.

$$\text{Height}(T_1^k) = \text{Height}(T_1^{k-1}) + 1$$

[T_1^k と T_2^k, \dots, T_{k-1}^k 間の独立性]

T_i^k ($i = 2, \dots, k-1$) の構成では T_i^{k+} 中の点 p を発して点 0 に至る道は, T_i^{k-} に於いては僅かに点 $(2^{i-2})' \in Y(T_i^{k-})$ を通過するのみである. これに対し T_1^k では $(2^{i-2})' \in Y(T_1^{k-})$ と T_1^{k+} の点を繋ぐ辺は定義されていないから点 $(2^{i-2})'$ を通過することはない.

又, T_1^{k+} の辺 $(2_+^{i-2})(2_+^{i-2})'$ ($i = 2, \dots, k-1$) は, T_i^{k+} と共有されるが, T_j^{k+} ($j = 1, i$) 中の点 p を発して点 0 に至るそれぞれの道 $P_1^k[p, 0], P_i^k[p, 0]$ がこの辺を共有することはない. これはこの辺の 2 個の端点と点 0 との位置関係が, その間の距離 $d(2_+^{i-2}, 0)$ 及び $d((2_+^{i-2})', 0)$ の比較:

$$\text{木 } T_1^{k+} \text{ に於いては} \quad d(2_+^{i-2}, 0) > d((2_+^{i-2})', 0)$$

$$\text{木 } T_i^{k+} \text{ に於いては} \quad d(2_+^{i-2}, 0) < d((2_+^{i-2})', 0) \text{ より}$$

が示すように木 T_1^{k+} と木 T_i^{k+} に於いて相反するからである.

なお, T_1^{k+} の辺 $0_+ 0'_+$ は T_i^k ($i = 2, \dots, k-1$) により共有されない.

[T_k^k の構成]

T_1^{k-1} を反転して得た $\uparrow T_1^{k-1}$ の点名を次のように改める.

$$X(\mathcal{T}_1^{k-1}) = \{0_+, 1_+, \dots, (2^{k-2} - 1)_+\} \quad Y(\mathcal{T}_1^{k-1}) = \{0'_+, 1'_+, \dots, (2^{k-2} - 1)'_+\}$$

このように改名された \mathcal{T}_1^{k-1} に更に若干の修正を加える. 先ず, 辺 $(2_+^0)(2_+^0)', \dots, (2_+^{k-3})(2_+^{k-3})'$ を削除し, 新たに辺 $2_+^0 0'_+, 2_+^1 0'_+, \dots, 2_+^{k-3} 0'_+$ を加える. こうして得られたグラフを T_k^{k+} とする.

次に T_k^{k-} を定義する. T_k^{k-} の点名を次のように定義する.

$$X(T_k^{k-}) = \{0_-, 1_-, \dots, (2^{k-2} - 1)_-\} \quad Y(T_k^{k-}) = \{0'_-, 1'_-, \dots, (2^{k-2} - 1)'_-\}$$

T_k^{k-} の辺集合は空であるとする. T_k^{k-}, T_k^{k+} 間の辺は, $X(T_k^{k-}), Y(T_k^{k+})$ 間と $X(T_k^{k-}), Y(T_k^{k+})$ 間に $0_- 0'_+, 1_- 1'_+, \dots, (2^{k-1} - 1)_- (2^{k-1} - 1)'_+$ 及び $0'_- 0_+, 1'_- 1_+, \dots, (2^{k-1} - 1)'_- (2^{k-1} - 1)_+$ を定義する.

\mathcal{T}_1^{k-1} から修正を経て定義された T_k^{k+} の高さは修正に拘らず変化しない. \mathcal{T}_1^{k-1} に於ける最長の道の経路に修正が関係しないからである. 即ち T_k^{k+} の高さは T_1^{k-1} の高さに等しい. 一方, T_k^{k-} 内部で定義された辺はないので, 次式が成立する.

$$\text{Height}(T_k^{k-}) = \text{Height}(T_1^{k-1}) + 2$$

[T_k^{k+} と $T_1^k, T_2^k, \dots, T_{k-1}^k$ 間の独立性]

T_k^{k+} の点 p からの道に関しては, T_k^{k+} が T_1^{k-1} の辺の付替えによる修正であり, 修正された辺は全て点 $0'_+$ に接続されてそこから直接に点 $0 (= 0_-)$ に至る. 一方, $T_1^k, T_2^k, \dots, T_{k-1}^k$ に於いては $p \neq 0'_+$ のとき道 $P_1^k[p, 0], P_2^k[p, 0], \dots, P_{k-1}^k[p, 0]$ はいずれも点 $0'_+$ を通過することがない. 他方, T_k^{k+} は修正前は T_1^{k-1} と同構造であり, $T_2^{k+}, T_3^{k+}, \dots, T_{k-1}^{k+}$ は $T_2^{(k-1)-}, T_3^{(k-1)-}, \dots, T_{k-1}^{(k-1)-}$ と同構造である. 更に, T_k^{k-} 内には辺は存在せず, T_k^{k-} 内の点 q から点 $0 (= 0_-)$ への T_k^{k-} の道は q から直ちに T_k^{k+} の点へ移り, やがて T_k^{k+} の点 $0'_+$ に至り, そこから直接 0 に到着する. 他方, $T_1^k, T_2^k, \dots, T_{k-1}^k$ に於いては q から 0 への道は $T_1^{k+}, T_2^{k+}, \dots, T_{k-1}^{k+}$ の点を通過することはない. 以上述べたことから T_k^{k+} と $T_1^k, T_2^k, \dots, T_{k-1}^k$ は互いに独立であると結論される.

以上は, 一定の構成原理に基づいて $k-1$ 次元超立方体グラフ C_{k-1} の点独立な全域木の組 $(T_1^{k-1}, \dots, T_{k-1}^{k-1})$ が構成されたと仮定して, k 次元超立方体グラフ C_k の点独立な全域木の組 (T_1^k, \dots, T_k^k) が同じ原理を用いて構成できることを示した. 故に, 一般に n 次元超立方体グラフ C_n の点独立な全域木の組 (T_1^n, \dots, T_n^n) は存在し, それを帰納的に構成することができる.

■

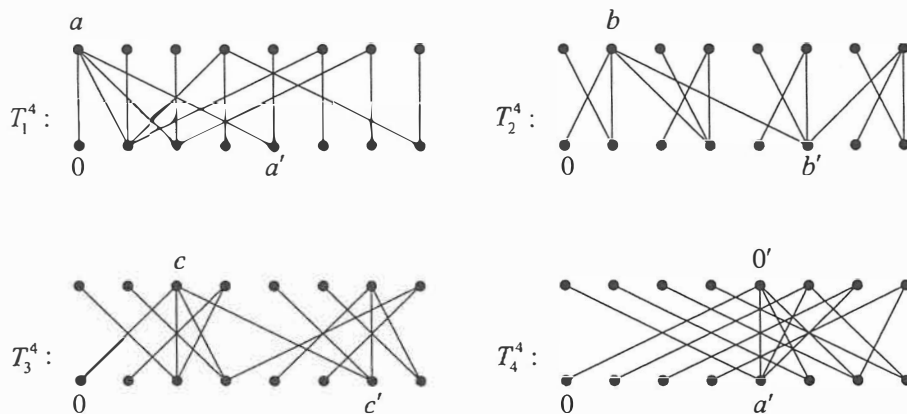
独立木の高さの最大に就いては定理 1 より次の系 1 が得られる. C_n に対する $\text{Height}(T_i^n)$ ($i=1, \dots, n$) は下の式により定まるが, 値を下表のように示せば(但し, $2 \leq n \leq 6$ のみ示す), 系 1 の確認が容易であろう.

$$\text{Height}(T_i^n) = \text{Height}(T_i^{n-1}) + 1 \quad (i=1, \dots, k-1), \quad \text{Height}(T_n^n) = \text{Height}(T_1^{n-1}) + 2$$

従って, $\text{Max Height}(T_i^n) = k + 2$ (但し $4 \leq n \leq 6$)

	Height(T_i^n)					
	C_n	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
T_1^n		3	4	5	6	7
T_2^n		3	4	5	6	7
T_3^n			4	5	6	7
T_4^n				6	7	8
T_5^n					7	8
T_6^n						8

但し, C_4 に対する独立全域木の高さに就いては, 次のような変更で改善される.



高さに就いては, $\text{Height}(T_i^4) = 5$ ($1 \leq i \leq 4$) が成り立つ.

同様の変更がより高次元の C_n ($n \geq 5$) に対してできるかどうかは差当って不明である.

故に, 次の系を得る.

[系 1]

$$\text{Max Hight}(T_i^n) = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ n+1 & (2 \leq n \leq 4) \\ n+2 & (n \geq 5) \end{cases}$$

■

5. 放送中心(Broadcasting Centre)を有する通信網への応用

木 T の 1 点 u をレベル 0 として, この点 0 に放送中心が配置されているとする. 今, 点 0 か

ら通信文がレベル1の全ての点に向って送られたとする.レベル1の点はこの通信文を受信すると,自身が T の葉でない限り同通信文を更に隣接する全てのレベル2の点に移牒する.この過程(レベル k から隣接する全てのレベル $k+1$ への通信文伝達)が繰返されて T の全ての葉が通信文を受領し終えたとき通信網としての放送作業は完了する.

さて,通信網 T に故障がない場合上述の放送作業により通信文が T の全ての点に伝達されることは明らかである.しかし1点(中継局)でも或いは1辺(通信線)でも故障すれば通信は杜絶する.このことは網のトポロジーが木構造であるとき耐故障性が薄弱であることを意味する.そこで耐故障性を高める工夫を為すことは大いに有用であるといえることができる.

通信網として n 次元超立方体グラフ C_n を用いるとする.前章の定理1で示したように点独立な全域木の n 組 (T_1^n, \dots, T_n^n) を構成し,定点0に放送中心を配置し全 T_i^n を用いて上述の放送作業を行うとする.今グラフ C_n の $n-1$ 個の要素(点或いは辺即ち計算機或いは通信線)に物理的に故障が生じ,これらは機能を失ったと仮定する. C_n の故障していない任意の点 p へ向う点0からの T_1^n, \dots, T_n^n の道 $P_1^n[0, p], \dots, P_n^n[0, p]$ は互いに内点独立であるから, $n-1$ 個の故障によって少なくとも1個の道 $P_i^n[0, p]$ は故障した要素を含むことはない. p の任意性から, $n-1$ 個の故障にも係らず C_n の故障していない全ての点へ通信文が伝達されるといえることができる.即ち,放送を目的とする通信網として,独立な n 個の全域木の組 (T_1^n, \dots, T_n^n) が定義された n 次元超立方体グラフ C_n は耐故障性が高いといえることができる.

亦,通信設備に物理的故障が発生しない場合でも通信文に間歇的(intermittent)誤伝送が生じる場合を想定するとき,受信側に於いて多数決論理に基づいて通信文を選択するならば高い確度で正しい通信文を得ることが可能である.

以上の議論は点独立な n 個の全域木の組 (T_1^n, \dots, T_n^n) が定義される任意のグラフ G に対し言えることである.

更に全域木 T_i^n の高さは通信文の放送と中継の最大回数を表すから, $\text{Max Height}(T_i^n)$ が小さいことが通信文伝達に要する時間を短縮させるために望ましい要件となる.文献[4]の積グラフに対する全域木構成法では, C_n に就いては $\text{Max Height}(T_i^n)$ の下限は $\lceil 3n/2 \rceil$ であることが示されている.本稿ではこの値は, $2 \leq n \leq 4$ に対しては $n+1$ であり, $n \geq 5$ に対しては $n+2$ である.従って本稿の構成法が優れていると言える.

6. 結 論

本稿では C_n に対する独立な n 個の全域木の構成を, $n \leq 3$ に対しては直接に構成し,一般の n に対しては C_{n-1} の $n-1$ 個の独立全域木を用いて定義するという帰納的定義によって行った.これを文献[4]の構成法と比較検討すると,本稿の構成法自体は文献[4]に於ける一

般的構成法の一特殊例と見る事ができる. C_n に対して n 個の独立全域木が存在することの一般的証明を目的とするならば,文献 [4] のみで充分であるといえる.しかし,可能な限り高さの低い全域木を実際に構成することをも目標とするとき,帰納的定義の本性から構成法の繰返し適用によって目的の全域木を求めなければならない.その際,繰返しの各段階に於いて C_{k-1} に対する $k-1$ 個の全域木のいずれを選んで C_k に対する第 k 番目の全域木 T_k^k の構成に用いるべきかが問題となる.文献 [4] はこの面での検討を欠いている.本稿ではこの問題に関しては C_{k-1} に対する $k-1$ 個の全域木の高さが同一でない点に着目しつつ繰返し構成法を適用した結果,系 1 に示した結果を得ることができた.

本稿の結果を総括すると, n 次元超立方体グラフ C_n は一般に C_{n-m} と C_m ($1 \leq m < n$) の直積グラフ $C_{n-m} \times C_m$ であるが,特に $C_n = C_{n-1} \times C_1$ としたときの構成法を扱ったのが本稿の方法である.一般化して $m \geq 2$ の場合に有利な結果が得られるであろうかという問題が残るが,それは否定的である.従って, n 次元超立方体グラフに関しては現状では本稿の構成法が単純でもあるので最良であるといえる.

参 考 文 献

- [1] A.Itai and M.Rodeh, The multi-tree approach to reliability in distributed networks, Information and Computation, Vol.79, pp.43-59, 1988.
- [2] J.Cherryan and S.N.Maheshwari, Finding nonseparating induced cycles and independent spanning trees in 3-connected graphs, J. Algorithms, Vol.9, pp.507-537, 1988.
- [3] A.Zehavi and A.Itai, Three tree-paths, J. Graph Theory, Vol.13, pp.175-188, 1989.
- [4] 小保方 幸次, 鮑 豊, 岩崎 至宏, 五十嵐 善英, 積グラフの独立な全域木について, 情報処理学会研究報告「アルゴリズム」, No.049-004, 1995.

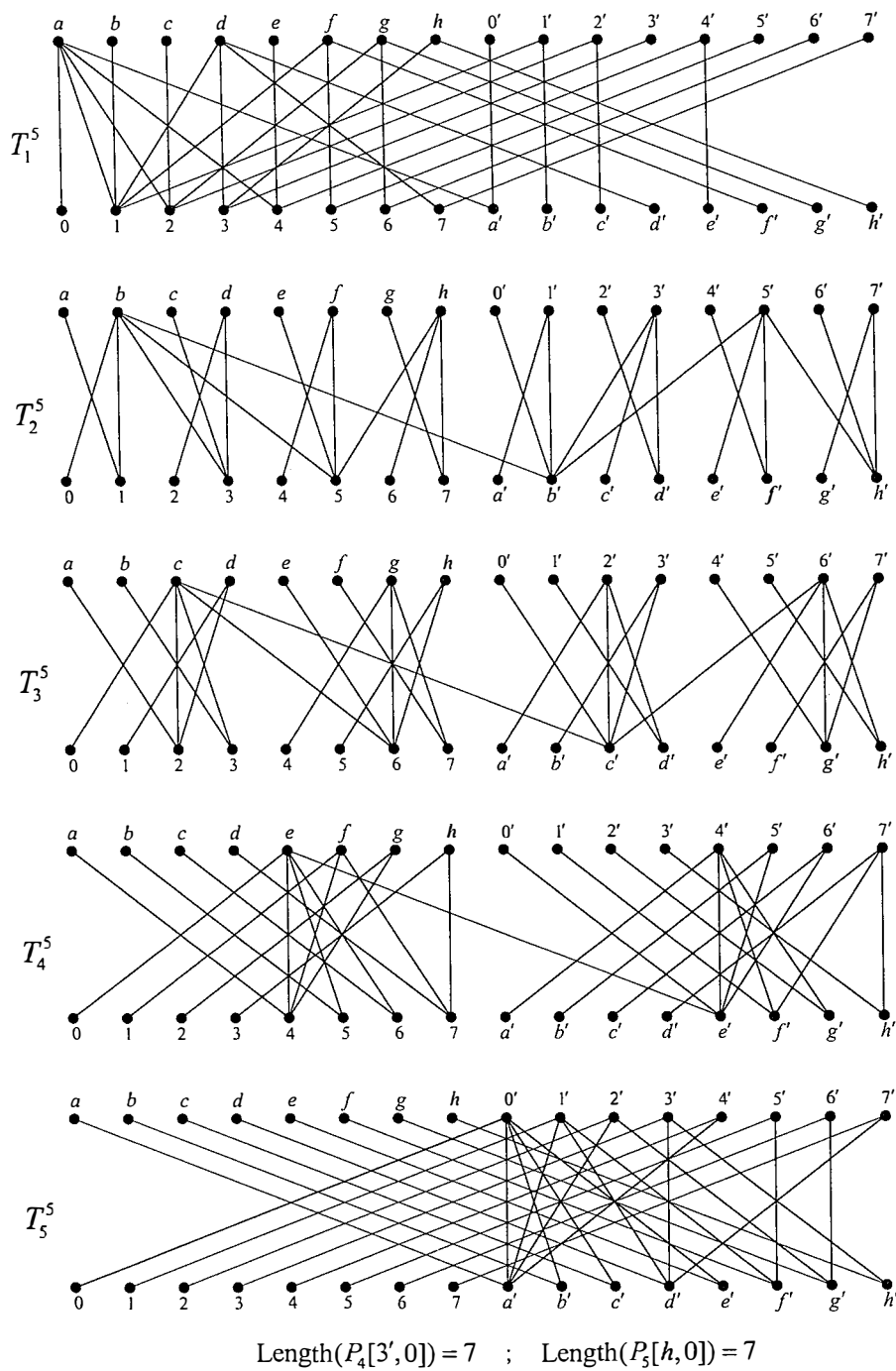


Figure 1. $(T_1^5, T_2^5, T_3^5, T_4^5, T_5^5)$ for C_5

$P_1^5[u, 0]$	$P_2^5[u, 0]$	$P_3^5[u, 0]$	$P_4^5[u, 0]$	$P_5^5[u, 0]$
1a0	1b0	1d2c0	1f4e0	11'a'0'0
2a0	2d3b0	2c0	2g4e0	22'a'0'0
3d1a0	3b0	3c0	3h7f4e0	33'd'1'a'0'0
a0	a1b0	a2c0	a4e0	aa'0'0
b1a0	b0	b3c0	b5e0	bb'0'0
c2a0	c3b0	c0	c6e0	cc'0'0
d1a0	d3b0	d2c0	d7f4e0	dd'1'a'0'0
4a0	4f5b0	4g6c0	4e0	44'a'0'0
5f1a0	5b0	5h6c0	5e0	55'f'2'a'0'0
6g2a0	6h5b0	6c0	6e0	66'g'2'a'0'0
7d1a0	7h5b0	7g6c0	7f4e0	77'd'1'a'0'0
e4a0	e5b0	e6c0	e0	ee'0'0
f1a0	f5b0	f7g6c0	f4e0	ff'1'a'0'0
g2a0	g7h5b0	g6c0	g4e0	gg'2'a'0'0
h3d1a0	h5b0	h6c0	h7f4e0	hh'3'd'1'a'0'0
0'a'a0	0'b'b0	0'c'c0	0'e'e0	0'0
1'1a0	1'b'b0	1'd'2'c'c0	1'f'4'e'e0	1'a'0'0
2'2a0	2'd'3'b'b0	2'c'c0	2'g'4'e'e0	2'a'0'0
3'3d1a0	3'b'b0	3'c'c0	3'h'7'f'4'e'e0	3'd'1'a'0'0
a'a0	a'1'b'b0	a'2'c'c0	a'4'e'e0	a'0'0
b'1'1a0	b'b0	b'3'c'c0	b'5'e'e0	b'0'0
c'2'2a0	c'3'b'b0	c'c0	c'6'e'e0	c'0'0
d'd1a0	d'3'b'b0	d'2'c'c0	d'7'f'4'e'e0	d'1'a'0'0
4'4a0	4'f'5'b'b0	4'g'6'c'c0	4'e'e0	4'a'0'0
5'5f1a0	5'b'b0	5'h'6'c'c0	5'e'e0	5'f'1'a'0'0
6'6g2a0	6'h'5'b'b0	6'c'c0	6'e'e0	6'g'2'a'0'0
7'7d1a0	7'h'5'b'b0	7'g'6'c'c0	7'f'4'e'e0	7'd'1'a'0'0
e'4'4a0	e'5'b'b0	e'6'c'c0	e'e0	e'0'0
f'f1a0	f'5'b'b0	f'7'g'6'c'c0	f'4'e'e0	f'1'a'0'0
g'g2a0	g'7'h'5'b'b0	g'6'c'c0	g'4'e'e0	g'2'a'0'0
h'h3d1a0	h'5'b'b0	h'6'c'c0	h'7'f'4'e'e0	h'3'd'1'a'0'0

Table 1. Tree-paths $P_i^5[u, 0]$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) for $u \in V(C_5)$

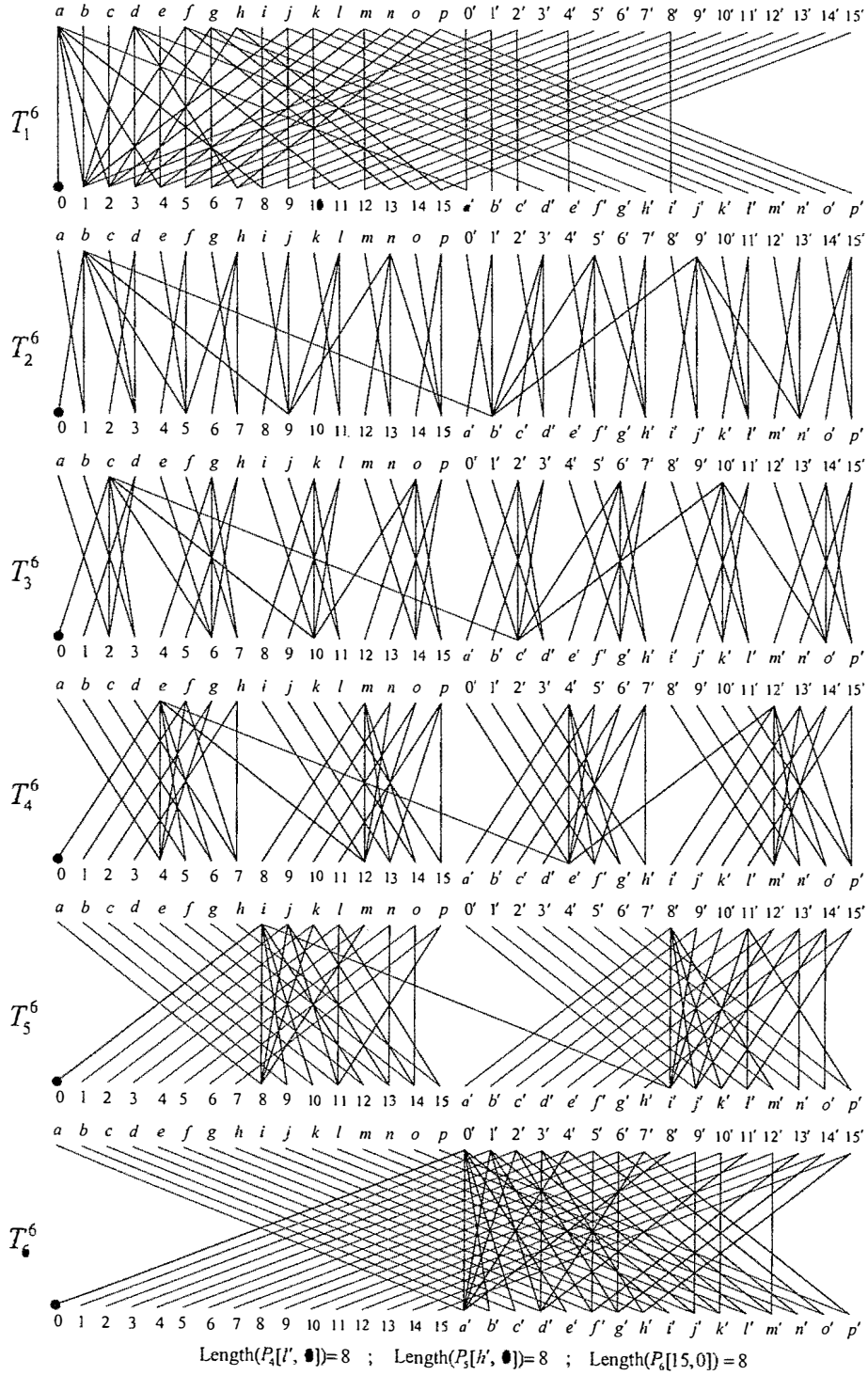


Figure 2. $(T_1^6, T_2^6, T_3^6, T_4^6, T_5^6, T_6^6)$ for C_6

$P_1^6[u, 0]$	$P_2^6[u, 0]$	$P_3^6[u, 0]$	$P_4^6[u, 0]$	$P_5^6[u, 0]$	$P_6^6[u, 0]$
1a0	1b0	1d2c0	1f4e0	1j8i0	11'a'0'0
2a0	2d3b0	2c0	2g4e0	2k8i0	22'a'0'0
3d1a0	3b0	3c0	3h7f4e0	3l11j8i0	33'd'l'a'0'0
a0	a1b0	a2c0	a4e0	a8i0	aa'0'0
b1a0	b0	b3c0	b5e0	b9i0	bb'0'0
c2a0	c3b0	c0	c6e0	c10i0	cc'0'0
d1a0	d3b0	d2c0	d7f4e0	d11j8i0	dd'l'a'0'0
4a0	4f5b0	4g6c0	4e0	4m8i0	44'a'0'0
5f1a0	5b0	5h6c0	5e0	5n13j8i0	55'f'l'a'0'0
6g2a0	6h5b0	6c0	6e0	6o14k8i0	66'g'2'a'0'0
7d1a0	7h5b0	7g6c0	7f4e0	7p11j8i0	77'd'l'a'0'0
e4a0	e5b0	e6c0	e0	e12i0	ee'0'0
f1a0	f5b0	f7g6c0	f4e0	f13j8i0	ff'l'a'0'0
g2a0	g7h5b0	g6c0	g4e0	g14k8i0	gg'2'a'0'0
h3d1a0	h5b0	h6c0	h7f4e0	h15l11j8i0	hh'3'd'l'a'0'0
8a0	8j9b0	8k10c0	8m12e0	8i0	88'a'0'0
9j1a0	9b0	9l10c0	9n12e0	9i0	99'j'l'a'0'0
10k2a0	10l9b0	10c0	10o12e0	10i0	1010'k'2'a'0'0
11d1a0	11l9b0	11k10c0	11p13m12e0	11j8i0	111'l'd'l'a'0'0
i8a0	i9b0	i10c0	i12e0	i0	ii'0'0
j1a0	j9b0	j11k10c0	j13m12e0	j8i0	jj'l'a'0'0
k2a0	k11l9b0	k10c0	k14m12e0	k8i0	kk'2'a'0'0
l3d1a0	l9b0	l10c0	l15p13m12e0	l11j8i0	ll'3'd'l'a'0'0
12m4a0	12n9b0	12o10c0	12e0	12i0	1212'm'4'a'0'0
13f1a0	13n9b0	13p14o10c0	13m12e0	13j8i0	1313'f'l'a'0'0
14g2a0	14p15n9b0	14o10c0	14m12e0	14k8i0	1414'g'2'a'0'0
15h3d1a0	15n9b0	15o10c0	15p13m12e0	15l11j8i0	1515'h'3'd'l'a'0'0
m4a0	m13n9b0	m14o10c0	m12e0	m8i0	mm'4'a'0'0
n5f1a0	n9b0	n15o10c0	n12e0	n13j8i0	nn'5'f'l'a'0'0
o6g2a0	o15n9b0	o10c0	o12e0	o14k8i0	oo'6'g'2'a'0'0
p7d1a0	p15n9b0	p14o10c0	p13m12e0	p11j8i0	pp'7'd'l'a'0'0

Table 2. Tree-paths $P_i^6[u, 0]$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) for $u \in V(C_6)$ (continued to the next page)

$P_1^6[u, 0]$	$P_2^6[u, 0]$	$P_3^6[u, 0]$	$P_4^6[u, 0]$	$P_5^6[u, 0]$	$P_6^6[u, 0]$
0'a'a0	0'b'b0	0'c'c0	0'e'e0	0'i'i0	0'0
1'1a0	1'b'b0	1'd'2'c'c0	1'f'4'e'e0	1'j'8'i'i0	1'a'0'0
2'2a0	2'd'3'b'b0	2'c'c0	2'g'4'e'e0	2'k'8'i'i0	2'a'0'0
3'3d1a0	3'b'b0	3'c'c0	3'h'7'f'4'e'e0	3'l'11'j'8'i'i0	3'd'1'a'0'0
a'a0	a'1'b'b0	a'2'c'c0	a'4'e'e0	a'8'i'i0	a'0'0
b'1'1a0	b'b0	b'3'c'c0	b'5'e'e0	b'9'i'i0	b'0'0
c'2'2a0	c'3'b'b0	c'c0	c'6'e'e0	c'10'i'i0	c'0'0
d'd1a0	d'3'b'b0	d'2'c'c0	d'7'f'4'e'e0	d'11'j'8'i'i0	d'1'a'0'0
4'4a0	4'f'5'b'b0	4'g'6'c'c0	4'e'e0	4'm'8'i'i0	4'a'0'0
5'5f1a0	5'b'b0	5'h'6'c'c0	5'e'e0	5'n'13'j'8'i'i0	5'f'1'a'0'0
6'6g2a0	6'h'5'b'b0	6'c'c0	6'e'e0	6'o'14'k'8'i'i0	6'g'2'a'0'0
7'7d1a0	7'h'5'b'b0	7'g'6'c'c0	7'f'4'e'e0	7'p'11'j'8'i'i0	7'd'1'a'0'0
e'4'4a0	e'5'b'b0	e'6'c'c0	e'e0	e'12'i'i0	e'0'0
f'f1a0	f'5'b'b0	f'7'g'6'c'c0	f'4'e'e0	f'13'j'8'i'i0	f'1'a'0'0
g'g2a0	g'7'h'5'b'b0	g'6'c'c0	g'4'e'e0	g'14'k'8'i'i0	g'2'a'0'0
h'h3d1a0	h'5'b'b0	h'6'c'c0	h'7'f'4'e'e0	h'15'l'11'j'8'i'i0	h'3'd'1'a'0'0
8'8a0	8'j'9'b'b0	8'k'10'c'c0	8'm'12'e'e0	8'i'i0	8'a'0'0
9'9j1a0	9'b'b0	9'l'10'c'c0	9'n'12'e'e0	9'i'i0	9'j'1'a'0'0
10'10k2a0	10'l'9'b'b0	10'c'c0	10'o'12'e'e0	10'i'i0	10'k'2'a'0'0
11'11d1a0	11'l'9'b'b0	11'k'10'c'c0	11'p'13'm'12'e'e0	11'j'8'i'i0	11'd'1'a'0'0
i'8'8a0	i'9'b'b0	i'10'c'c0	i'12'e'e0	i'i0	i'0'0
j'j1a0	j'9'b'b0	j'11'k'10'c'c0	j'13'm'12'e'e0	j'8'i'i0	j'1'a'0'0
k'k2a0	k'11'l'9'b'b0	k'10'c'c0	k'14'm'12'e'e0	k'8'i'i0	k'2'a'0'0
l'l3d1a0	l'9'b'b0	l'10'c'c0	l'15'p'13'm'12'e'e0	l'11'j'8'i'i0	l'3'd'1'a'0'0
12'12m4a0	12'n'9'b'b0	12'o'10'c'c0	12'e'e0	12'i'i0	12'm'4'a'0'0
13'13f1a0	13'n'9'b'b0	13'p'14'o'10'c'c0	13'm'12'e'e0	13'j'8'i'i0	13'f'1'a'0'0
14'14g2a0	14'p'15'n'9'b'b0	14'o'10'c'c0	14'm'12'e'e0	14'k'8'i'i0	14'g'2'a'0'0
15'15h3d1a0	15'n'9'b'b0	15'o'10'c'c0	15'p'13'm'12'e'e0	15'l'11'j'8'i'i0	15'h'3'd'1'a'0'0
m'm4a0	m'13'n'9'b'b0	m'14'o'10'c'c0	m'12'e'e0	m'8'i'i0	m'4'a'0'0
n'n5f1a0	n'9'b'b0	n'15'o'10'c'c0	n'12'e'e0	n'13'j'8'i'i0	n'5'f'1'a'0'0
o'o6g2a0	o'15'n'9'b'b0	o'10'c'c0	o'12'e'e0	o'14'k'8'i'i0	o'6'g'2'a'0'0
p'p7d1a0	p'15'n'9'b'b0	p'14'o'10'c'c0	p'13'm'12'e'e0	p'11'j'8'i'i0	p'7'd'1'a'0'0